

**Appunti**  
di  
**Metodi di valutazione delle alternative:**  
Le tecniche multicriteriali

Pasquale Carotenuto

# Indice

<b>1</b>	<b>Formulazioni di un problema decisionale</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Metodi di valutazione delle alternative</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Multiple Criteria Decision Making: generalità sull'Analisi Multicriteria</b>	<b>5</b>
<b>3.1</b>	<b>Analisi delle soluzioni del problema decisionale MCDM</b>	<b>7</b>
<b>4</b>	<b>Classificazioni delle tecniche di analisi multicriteria dell'approccio MADM</b>	<b>8</b>
<b>5</b>	<b>Approccio Metodologico alle tecniche di analisi MADM</b>	<b>13</b>
<b>5.1</b>	<b>Utility Value Analysis (UVA) o Simple Additive Weighting method (SAW)</b>	<b>15</b>
<b>5.2</b>	<b>Elimination Et Choice Translating Reality (ELECTRE)</b>	<b>19</b>
<b>5.3</b>	<b>Technique for Order Preference by Similarity to Ideal Solution (TOPSIS)</b>	<b>23</b>
<b>6</b>	<b>Analisi di sensitività</b>	<b>26</b>

# 1 Formulazioni di un problema decisionale.

In generale, per un qualsiasi problema decisionale, dobbiamo distinguere tre formulazioni diverse ("decision making problem"):

- ❑ *l'analisi operativa,*
- ❑ *la valutazione socioeconomica,*
- ❑ *la valutazione strategica.*

Tali categorie di valutazione si riferiscono a diversi aspetti di un problema di valutazione.

In particolare in un contesto decisionale tecnico-progettuale l'**analisi operativa** rappresenta il modo più dettagliato di valutare l'infrastruttura di un sistema tecnico ed in pratica determina se un sistema tecnico adempie ai suoi prestabiliti obiettivi.

A differenza dell'analisi operativa, la **valutazione socioeconomica** non si occupa delle prestazioni tecniche di un sistema specifico, ma dell'impatto sociale ed economico di questo. Scopo di tale valutazione non è quello di giudicare la bontà tecnica di ogni sistema in esame ma quello di stimare se lo specifico progetto o programma di investimento associato, è socialmente ed economicamente vantaggioso.

<i>Categoria</i> <i>Caratteristica</i>	<i>Analisi Operativa</i>	<i>Valutazione Socio-economica</i>	<i>Valutazione Strategica</i>
<b>Particolarità della valutazione</b>	Valutazione tecnica della efficienza operativa	Valutazione economica degli impatti sociali	Valutazione strategica a lungo termine
<b>Scopo</b>	Determinazione di una soluzione tecnicamente superiore	Indicazione del valore sociale	Stima dei principali vantaggi e rischi
<b>Alternative</b>	Singole opzioni tecniche	Progetti di investimenti pubblici concreti	Tecnologie complete
<b>Prospettive</b>	Controllo ed ottimizzazione di sistemi tecnici	Allocazione e gestione ottimale di risorse limitate	Norme alla base dello sviluppo sostenibile
<b>Risultati</b>	Formulazioni sulle tecniche e sulle prestazioni operative	Identificazione di guadagni e perdite sociali	Valutazione di tutte le conseguenze future di vasta portata

Figura 1: caratteristiche delle categorie di valutazione

La **valutazione strategica** elabora le strategie a lungo termine legate all'introduzione di tecnologie innovative che possono influenzare gli scenari sociali futuri e le abitudini di vita in modo determinante, quindi fondamentalmente anche tale valutazione ha lo scopo di determinare la alternativa socialmente migliore. Tutte le valutazioni che richiedono previsioni sulle situazioni future contengono elementi di incertezza e richiedono particolare preparazione, in campo tecnologico l'area di incertezza è particolarmente estesa e quindi occorre ricorrere ad approssimazioni per i valori da utilizzare nella valutazione.

La tabella in figura 1 riassume le diverse categorie di valutazione di un problema decisionale ed evidenzia le caratteristiche fondamentali di ciascuna.

## 2 Metodi di valutazione delle alternative

Tutte le diverse formulazioni di un problema decisionale, sopra esposte, includono metodi di valutazione delle alternative che utilizzano l'*analisi costi-benefici* (Cost-Benefit Analysis: CBA) o l'*analisi multicriteria* (Multiple- Criteria Analysis: MCA). Generalmente possiamo strutturare i problemi decisionali in modo tale che le grandezze rilevanti per la valutazione sono scelte, definite e misurate con l'intento di utilizzarle con l'uno o con l'altro metodo di analisi. È importante sottolineare che tali metodi di analisi differiscono sostanzialmente in alcune loro caratteristiche peculiari come:

- ❑ la definizione di obiettivi e criteri di valutazione;
- ❑ i principi fondamentali e le fonti dalle quali i valori sono derivati;
- ❑ le unità di misura nelle quali sono espressi tali valori;
- ❑ le regole utilizzate per elaborare i valori riferiti a diversi periodi di tempo.

In alcuni casi la presenza di effetti a lungo termine (positivi o negativi), di rischi, di interessi conflittuali e di informazioni qualitative, non consente un impiego ed un uso significativo di tecniche di valutazione come quelle di tipo analisi costo-benefici, è questo il motivo dell'interesse verso gli approcci valutativi multidimensionali, propri dell'analisi multicriteria (MCA).

<i>Metodi di valutazione</i>	<i>Cost-Benefit Analysis</i>	<i>Multiple-Criteria Analysis</i>
<b>Caratteristica fondamentale</b>	Indicazione di costi e benefici sulla base di considerazioni di benessere in unità di misura monetaria	Indicazione di ogni aspetto rilevante per una decisione in unità di misura qualsiasi
<b>Origine dei valori assegnati</b>	Consumatori, produttori e gruppi sociali qualsiasi interessati	Decisore o staff decisionale, ovvero istituzione responsabile
<b>Obiettivi ; Criteri</b>	Massimizzazione del benessere sociale ; riferiti alle aree di influenza rilevanti	Scopi e traguardi articolati desiderati ; riferiti ai singoli aspetti concreti e misurabili degli obiettivi
<b>Misura del valore</b>	Valore monetario	Indici di raggiungimento degli obiettivi, pesi

Figura 2: confronto fra i metodi di valutazione CBA e MCA

Questi metodi cercano di tenere conto esplicitamente degli aspetti eterogenei e conflittuali dei complessi problemi del processo decisionale. Nonostante la grande varietà dei metodi valutativi multicriteri, essi hanno tutti un elemento in comune: l'esistenza di molteplici criteri valutativi. Lo scopo fondamentale dell'analisi multicriteria è quello di fornire una base razionale

per la classificazione di un certo numero di possibilità di scelta alternative valutate rispetto a più criteri contemporaneamente.

L'elemento comune di tutte queste tecniche di analisi è la capacità di esaminare le diverse alternative avvalendosi contemporaneamente di due o più criteri, relativi ad obiettivi conflittuali fra loro, che introducono differenti e non omogenee unità di misura.

La figura 2 mostra un confronto schematico fra le caratteristiche essenziali dei due tipi di analisi CBA e MCA.

### 3 Multiple Criteria Decision Making: generalità sulla Analisi Multicriteria.

Con "Multiple Criteria Decision Making" (MCDM) intendiamo un particolare "processo decisionale", utilizzato in situazioni caratterizzate dalla necessità di scegliere fra numerose alternative in presenza di molteplici obiettivi generalmente in conflitto fra loro. In tutte le situazioni di Multiple Criteria Decision Making sono presenti uno o più "decisori" con il compito di sviluppare l'intero processo decisionale basato su un insieme di "obiettivi" da perseguire e su un insieme di "alternative" da valutare e confrontare fra loro.

Nell'analisi di un siffatto contesto decisionale occorre distinguere e correlare gli **obiettivi**, i **goals**, i **criteri**, gli **attributi**, le **variabili decisionali** e i **vincoli**.

In generale non vi sono definizioni universalmente accettate per questi termini quindi nel seguito utilizzeremo quelle ritenute più comprensibili.

Un **obiettivo** rappresenta un qualsiasi scopo da raggiungere, per ottenere il soddisfacimento di aspettative e aspirazioni. Un obiettivo, quindi, indica la direzione verso cui orientare gli sforzi e le risorse necessarie.

Un **goal** è invece un risultato che può essere raggiunto oltre le aspettative, oppure no, relativamente a valori di soglia, stabiliti a priori, di attributi generici, indipendentemente dagli obiettivi proposti in sede decisionale.

Un **criterio** rappresenta un aspetto particolare secondo cui valutare le caratteristiche complessive di un obiettivo, e questo comporta che ogni singolo obiettivo può essere valutato utilizzando contemporaneamente diversi criteri rappresentativi, scelti dallo staff decisionale.

Un **attributo** è una "misura di rispondenza" generica ovvero un qualsiasi "indicatore di prestazione" che fornisce la base per valutare "quanto" uno specifico obiettivo viene raggiunto da ognuna delle alternative in esame, rappresenta quindi uno strumento per la valutazione degli obiettivi.

Una **variabile decisionale** è invece una qualunque delle specifiche risoluzioni soggettive adottabili dal decisore, oppure può intendersi come una qualsiasi grandezza variabile presente nella schematizzazione del problema.

Un **vincolo** è una limitazione per gli attributi e per le variabili decisionali, presenti in una qualsiasi schematizzazione, che in alcuni casi può essere espressa matematicamente.

In un qualunque contesto decisionale multiobiettivo è inoltre necessario considerare l'esistenza di una "gerarchia" degli obiettivi da raggiungere che si riflette in un "ordine di importanza" dei corrispondenti criteri utilizzati.

Alcuni degli obiettivi sono esprimibili attraverso criteri con caratteristiche tali da consentire una loro misura oggettiva precisa, con le opportune unità di misura, altri invece sono valutabili solo in maniera soggettiva e qualitativa.

I problemi decisionali sviluppabili con l'approccio MCDM presentano alcune caratteristiche comuni:

- ❑ ciascun problema possiede molteplici obiettivi e molteplici criteri di valutazione: il decisore deve stabilire gli obiettivi e i criteri fondamentali per la formulazione di ciascun problema,
- ❑ generalmente i molteplici criteri sono conflittuali fra loro essendo spesso discordanti gli obiettivi da raggiungere,
- ❑ i criteri di valutazione sono espressi in differenti unità di misura,
- ❑ la soluzione di questi problemi garantisce la progettazione della alternativa che soddisfa al meglio i predisposti obiettivi (MODM: Multiple Objective Decision Making), oppure consente la scelta della alternativa progettuale migliore tra un numero finito di alternative che soddisfano gli obiettivi stabiliti (MADM: Multiple Attribute Decision Making).

Questo significa che i problemi di MCDM possono essere classificati in due categorie fondamentali con diverso approccio metodologico:

- ❑ “Multiple Attribute Decision Making” (MADM)
- ❑ “Multiple Objective Decision Making” (MODM)

L'approccio MODM si impiega nella fase primaria dello sviluppo progettuale con lo scopo di determinare ed organizzare in modo strutturato, la soluzione progettuale più rispondente alle prefissate singole esigenze progettuali; l'approccio MADM invece si sviluppa in sede di valutazione e scelta delle alternative progettuali elaborate nella fase precedente.

L'approccio MADM può essere concisamente rappresentato in forma matriciale. Una “matrice di decisione” o “matrice degli impatti”  $D$  è una matrice  $n \times m$  i cui elementi  $x_{ij}$  indicano gli “impatti” o “misure di rispondenza” ovvero la validità dell'alternativa progettuale  $j$ -esima,  $a_j$ , rispetto al criterio di valutazione  $i$ -esimo  $c_i$ , quindi l'alternativa  $a_j$  è rappresentata da un vettore colonna  $\bar{x}_j = (x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{nj})$ .

La tabella di figura 3, confronta schematicamente le caratteristiche dei due approcci, nel seguito svilupperemo in dettaglio il solo approccio MADM.

	<b>MADM</b>	<b>MODM</b>
<i>Origine dei criteri</i>	Attributi	Obiettivi
<i>Caratteristiche degli obiettivi</i>	Impliciti	Espliciti
<i>Caratteristiche degli attributi</i>	Espliciti	Impliciti
<i>Alternative</i>	Note, prestabilite inizialmente e in numero finito	Incognite, in numero indefinito ed emergenti durante l'analisi
<i>Interazioni con il decisore</i>	Non necessarie	Indispensabili
<i>Momenti di impiego</i>	Fase finale della progettazione: valutazione e selezione delle soluzioni proposte	Fase iniziale della progettazione: ideazione e costruzione delle eventuali soluzioni

Figura 3: tabella riassuntiva delle caratteristiche degli approcci MCDM

### 3.1 Analisi delle soluzioni del problema decisionale MCDM

Lo scenario di un qualunque contesto decisionale prevede un decisore che prende le decisioni del caso scegliendole da un insieme di possibili decisioni; nel seguito considereremo “ottimali” le risoluzioni scelte alla fine del processo decisionale.

Una possibile definizione di risoluzione ottimale è la seguente: “una decisione ottimale è una decisione tale da massimizzare la soddisfazione o il vantaggio del decisore”.

In generale vogliamo:

$$\begin{cases} \text{"massimizzare"} & f(d) \\ \text{con la limitazione:} & d \in D \end{cases}$$

dove  $d$  è una generica decisione,  $D$  è l'insieme delle possibili decisioni ed  $f(d)$  è la “funzione obiettivo”.

In dettaglio, senza perdere in generalità, possiamo affermare che le funzioni  $f(d)$ , devono essere tutte massimizzate, dato che per ogni obiettivo che deve essere minimizzato possiamo massimizzare il valore del suo negativo. Da un punto di vista matematico, massimizzare una tale funzione significa trovare tutte le soluzioni “non dominate” del problema: la soluzione 1 domina la soluzione 2 se è verificata la condizione  $f(d_1) \geq f(d_2)$ , questo significa che una soluzione è considerata non dominata se nessuna altra soluzione è ugualmente soddisfacente sotto ogni aspetto o migliore di essa perlomeno in un aspetto.

Consideriamo ad esempio un insieme qualsiasi di alternative discrete, per le quali si hanno due obiettivi discordanti entrambi da massimizzare, come in figura 4.

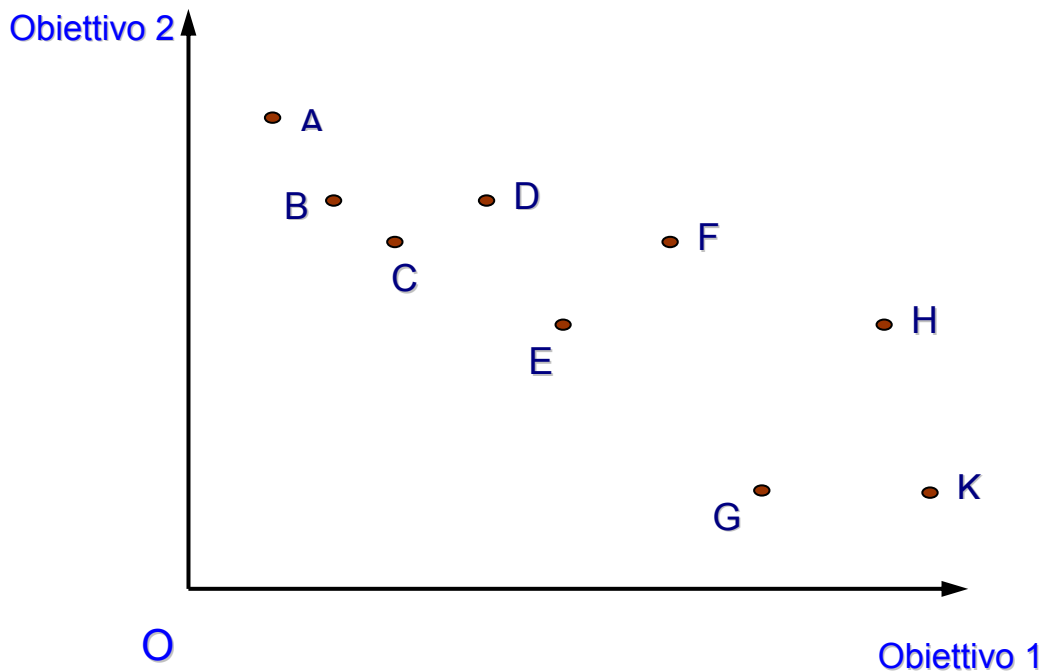


Figura 4: esempio di alternative discrete non dominate e dominate

Le soluzioni non dominate nel grafico in esame sono la **A**, la **D**, la **F**, la **H**, e la **K**; le soluzioni **B**, **C**, **E**, e **G** sono invece dominate rispettivamente dalla **D**, **F**, **H** e **K**. Le soluzioni **A** e **B** sono non dominate l'una rispetto all'altra, in quanto la soluzione **A** è migliore della soluzione **B** rispetto all'obiettivo 2, mentre la soluzione **B** supera la prima relativamente all'obiettivo 1. Anche le soluzioni **D** e **F** sono non dominate l'una rispetto all'altra, in quanto **D** è migliore di **F** relativamente all'obiettivo 2 ed **F** è migliore di **D** relativamente all'obiettivo 1. Analoghe conclusioni valgono per la coppia di soluzioni **D** ed **E** considerate l'una rispetto all'altra. La soluzione **D**, invece, domina la soluzione **B** perché soddisfa meglio l'obiettivo 1 anche se entrambe soddisfano allo stesso modo l'obiettivo 2.

Dall'analisi dell'insieme delle soluzioni alternative emerge appunto che le soluzioni non dominate sono la **A**, la **D**, la **F**, la **H** e la **K**, mentre le soluzioni dominate sono la **B**, la **C**, la **E** e la **G**.

In un qualsiasi problema decisionale MCDM la soluzione ottimale appartiene sempre all'insieme delle soluzioni non dominate.

In un problema MADM, la soluzione ideale, ossia l'alternativa ottimale fra tutte quelle note in esame, è quella individuata dai migliori valori degli attributi relativi a ciascun criterio presente nella matrice di decisione:

$$A^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) ,$$

dove:

$$x_i^* = \max_j U_i(x_{ij}) , \quad \text{con } j = 1, 2, \dots, m$$

in cui  $U_i(x_{ij})$  indica la funzione di valore (o di utilità) associata all'i-esimo criterio di valutazione. Solitamente il decisore, desidera massimizzare l'utilità che una qualunque soluzione alternativa presenta relativamente al raggiungimento di un determinato obiettivo. L'utilità della generica alternativa è misurata appunto da una "funzione di utilità"  $U$ : funzione definita dal decisore, per ogni obiettivo, che fornisce una misura scalare della validità della generica alternativa relativamente a quell'obiettivo.

In molte tecniche di analisi multicriteria, si utilizzano diverse funzioni di utilità, le alternative che presentano i valori più elevati di tali utilità finali sono quelle preferibili nel contesto decisionale.

## 4 Classificazioni delle tecniche di analisi multicriteria dell'approccio MADM.

Le molteplici classificazioni delle tecniche di analisi multicriteria appartenenti all'approccio MADM sviluppate negli ultimi decenni, si ottengono prendendo in considerazione i differenti aspetti e le peculiari caratteristiche delle tecniche stesse.

Una prima semplice classificazione proposta, è quella che raggruppa le tecniche di analisi in base alle "scale di misura adottabili", in quanto i criteri di valutazione delle varie alternative possono essere espressi da valori in scala di misura "cardinale" (criteri quantitativi) oppure in scala di misura "ordinale" (criteri qualitativi): una scala ordinale non fornisce, per definizione, informazioni riguardo alla differenza relativa tra due livelli qualitativi qualsiasi.



Una più complessa e significativa classificazione, è quella che si basa sulla “procedura di aggregazione” dei molteplici criteri di valutazione. La aggregazione dei criteri è compiuta nel momento in cui tali criteri devono essere stabiliti, confrontati, enumerati e “pesati” dal decisore, con lo scopo di giungere ad una formulazione sintetica, schematizzabile e ripetibile del contesto decisionale:

- ❑ tecniche MCA che non aggregano i criteri di valutazione:
  - *Compatibility Analysis (CA)*: analisi basata su un profilo qualitativo multidimensionale.
- ❑ tecniche MCA che aggregano i criteri di valutazione:
  - *Cost – Effectiveness Analysis (CEA)*: una tecnica MCA che misura soltanto i costi in unità monetarie ma non i benefici, rappresenta quindi un “ibrido” fra la CBA e la MCA,
  - *Utility – Value Analysis (UVA) ovvero Simple Additive Weighting Method (SAW)*,
  - *Elimination Et Choice Translating Reality (ELECTRE)*
  - *Technique for Order Preference by Similarity to Ideal Solution (TOPSIS)*

### ***Compatibility Analysis (CA)***

L’analisi di compatibilità è una tecnica MCA, applicabile a contesti decisionali relativamente semplici, che non richiede i giudizi di valore e la procedura di assegnazione dei pesi, propri del processo di aggregazione dei diversi criteri di analisi, ossia non necessita della elaborazione delle informazioni contenute nella matrice di decisione  $D$ . Invece fornisce, per ogni alternativa, un “*profilo qualitativo*” ottenuto come differenza tra il “*profilo di impatto*”, dato dagli impatti, relativi ad ogni criterio, dell’alternativa in esame, e il “*profilo richiesto*”, che mostra il livello desiderato per ogni criterio. In dettaglio, l’analisi di compatibilità può essere descritta ordinatamente come segue (Fig. 5):

1. il primo passo di questo processo consiste nel definire gli obiettivi che si vogliono raggiungere e nell’assegnare ad ognuno dei criteri corrispondenti stabiliti, il desiderato livello, in modo da ottenere il profilo richiesto;
2. il secondo passo è quello di quantificare gli impatti di ogni alternativa relativamente a ciascun criterio. La rappresentazione grafica di queste valutazioni è il profilo di impatto;
3. a questo punto i due profili possono essere confrontati ed il loro confronto conduce al profilo qualitativo. La struttura di questo profilo indica, per ogni singolo criterio, se i livelli desiderati sono stati raggiunti o meno e quanto grande è la differenza tra il valore degli impatti desiderati e calcolati.

Il confronto tra i profili qualitativi di differenti alternative, rivela per ciascun criterio i vantaggi e gli svantaggi delle alternative. La scelta della alternativa migliore si effettua semplicemente sulla base di questo confronto.

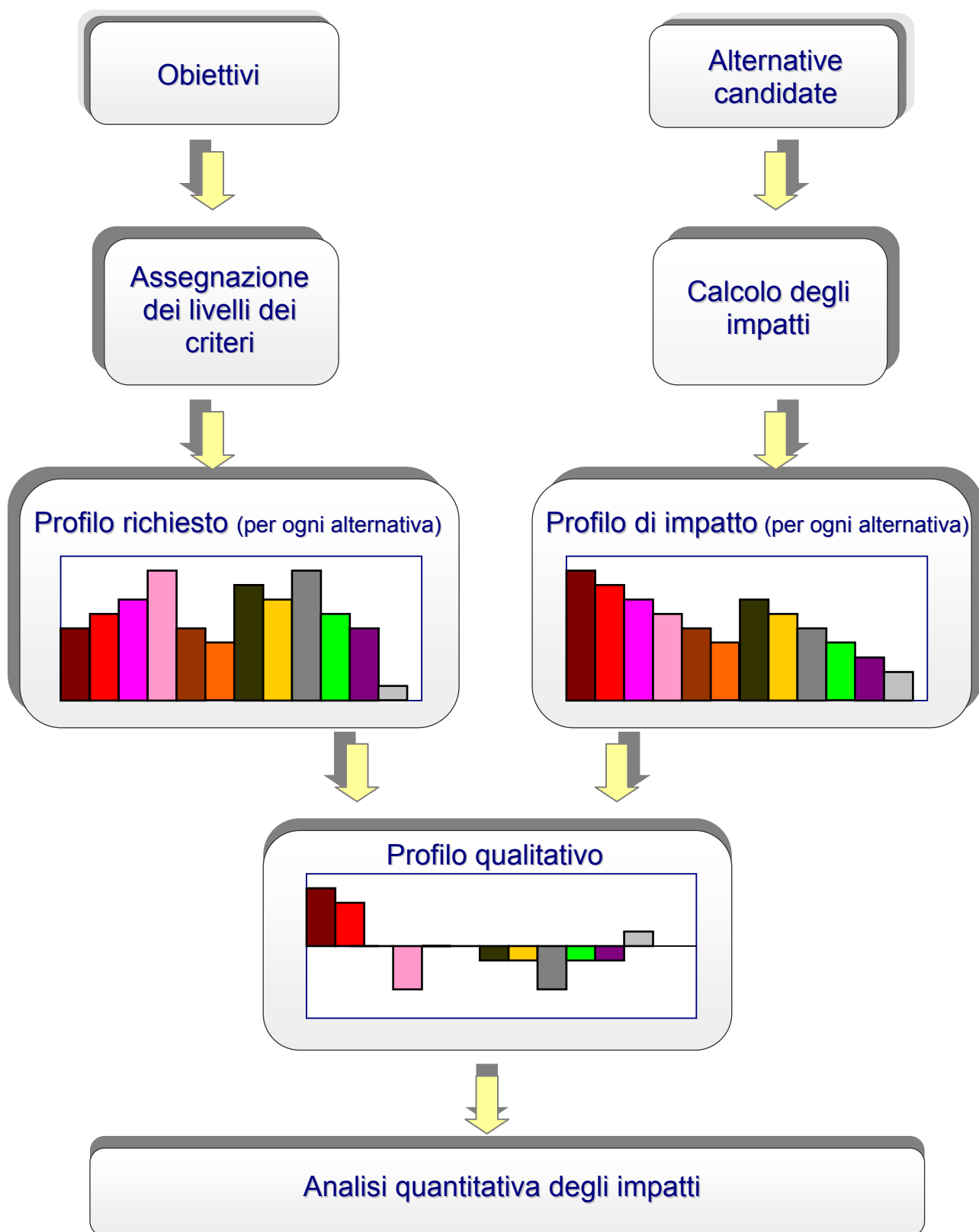


Figura 5: schema logico della procedura della CA

### ***Cost – Effectiveness Analysis (CEA)***

La Cost-Effectiveness Analysis non è una classica tecnica di analisi multicriteria in quanto ha elementi comuni sia alla CBA sia alla MCA. Infatti, i costi di un progetto sono misurati e valutati come nella CBA in termini monetari mentre i benefici e i vantaggi sono misurati come nella MCA in altre unità, che sono in seguito combinate in un unico indicatore di efficienza.

Il principale criterio di decisione è il rapporto costo-efficienza, ossia il rapporto tra le misure di prestazione od efficienza, ed il costo: maggiore è questo rapporto migliore è l'alternativa.

La misura di efficienza può essere un singolo impatto oppure un indicatore di prestazione ottenuto dall'aggregazione di molteplici criteri. In quest'ultimo caso è necessario avvalersi di un procedimento logico in grado di fornire una misura univoca dell'efficienza.

Generalmente la tecnica CEA si basa sulla valutazione di semplici e singoli impatti ed è appropriata in due situazioni particolari:

1. quando uno specifico risultato è stato stabilito e gli analisti vogliono conseguirlo con l'uso più efficiente delle risorse disponibili;
2. quando un bilancio preventivo per la realizzazione di un progetto è stato approvato e gli analisti desiderano fare il migliore uso di tale bilancio.

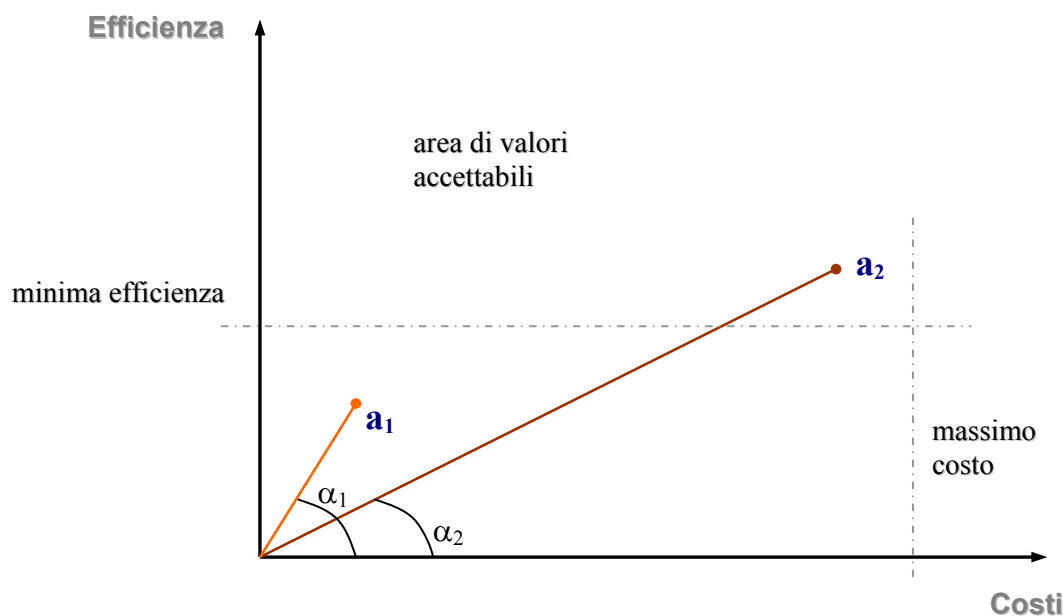


Figura 6: diagramma cartesiano Costi - Efficienza

La figura 6 illustra il rapporto costo-efficienza ed i vincoli addizionali dovuti ai massimi costi accettabili e alla minima efficienza richiesta rappresentati dalle due rette parallele agli assi costi, efficienza. Nel diagramma sono mostrate due alternative ( $a_1$ ,  $a_2$ ) ed i corrispondenti rapporti costo-efficienza, che possono essere rappresentati da  $\tan \alpha_1$  e  $\tan \alpha_2$ . La prima alternativa  $a_1$  presenta il rapporto costo-efficienza più elevato ( $\tan \alpha_1 > \tan \alpha_2$ ) risultando relativamente più efficiente e quindi più vantaggiosa; d'altra parte però non soddisfa il vincolo sul minimo valore dell'efficienza e per questo diventa meno preferibile dell'alternativa  $a_2$ . In pratica nel piano costi-efficienza individuiamo un'area rettangolare di valori richiesti e accettabili.

Una delle migliori classificazioni alla quale recentemente si fa riferimento, è quella proposta da Hwang nel 1991. La rappresentazione schematica di tale classificazione è mostrata nella figura 7.

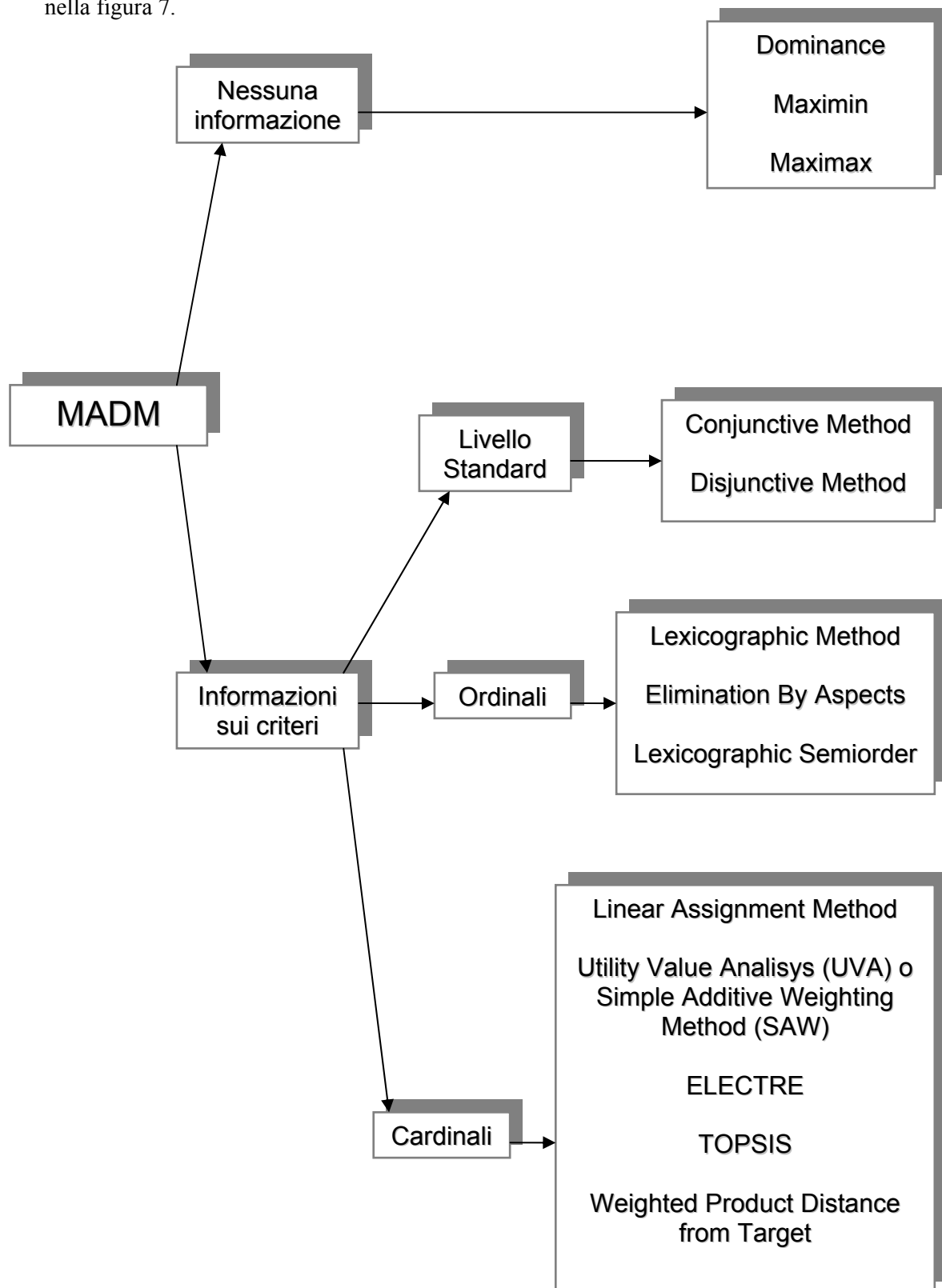


Figura 7: classificazione delle tecniche MADM

In questa classificazione, in base al tipo di informazione fornita dal decisore, abbiamo due possibili sottoclassi :

- ❑ nessuna informazione di preferenza;
- ❑ informazioni sui criteri.

Nel caso in cui il decisore non fornisce alcuna informazione di preferenza le tecniche utilizzabili sono la “Dominance”, la “Maximin” e la “Maximax”.

Se invece il decisore fornisce informazioni sui criteri, in base alle caratteristiche salienti di queste possiamo individuare tre sottoclassi:

- ❑ informazioni che evidenziano un livello standard o minimo valore accettabile di ciascun criterio: in questo caso le migliori tecniche utilizzabili sono la “Conjunctive Method” e la “Disjunctive Method”;
- ❑ informazioni che sottolineano l’importanza relativa dei criteri in base a preferenze ordinali: in questo caso le più opportune tecniche utilizzabili sono la “Lexicographic Method”, la “Elimination By Aspect” e la “Lexicographic Semiorder”;
- ❑ informazioni che risaltano l’importanza relativa dei criteri in base a preferenze cardinali: in questo ultimo caso le migliori tecniche utilizzabili sono la “Linear Assignment Method”, la “UVA o SAW”, la “ELECTRE”, la “TOPSIS” e la “Weighted Product Distance from Target”.

## 5 Approccio Metodologico alle tecniche di analisi MADM.

In generale, un processo di valutazione si sviluppa secondo più stadi che comprendono: la determinazione dei criteri di valutazione in relazione agli obiettivi da perseguire, l’assegnazione del loro peso, e l’indicazione del valore delle singole alternative. La struttura logica di un tale processo è propedeutica per ognuna delle tre tecniche di analisi impiegate per la valutazione delle alternative.

Le tre tecniche di analisi multicriteria scelte, risolvono efficacemente il problema della incomparabilità esistente tra i differenti impatti di ogni alternativa, relativamente ai vari criteri di giudizio e valutazione.

In una qualsiasi valutazione le diverse alternative progettuali sono confrontate con riferimento ad un insieme di criteri che esprimono le caratteristiche essenziali dei singoli obiettivi. Gli obiettivi indicano le “aree di interesse” e devono essere organizzati e descritti in modo chiaro in sede progettuale. Per creare sistemi facilmente comprensibili e verificabili, occorre elaborare insiemi ordinati di obiettivi chiari e semplici con configurazioni gerarchiche. La figura 8 riporta un modello formale della procedura di valutazione, nella quale risultano evidenziati gli input, gli output e le fasi principali della procedura stessa.

La prima fase principale è quella della costruzione della matrice  $D$  degli impatti (matrice di decisione): occorre innanzitutto determinare e schematizzare il sistema gerarchico degli obiettivi (obiettivi e criteri), in relazione ad ogni criterio occorre definire i corrispondenti “impatti” di ciascuna alternativa attraverso l’analisi degli impatti, che rappresenta una fase concettuale separata e indipendente dal contesto del processo di valutazione vero e proprio. Gli impatti  $e_{ij}$  riferiti ai singoli criteri  $c_i$  e alle singole alternative  $a_j$  realizzano la matrice di decisione  $D$ .

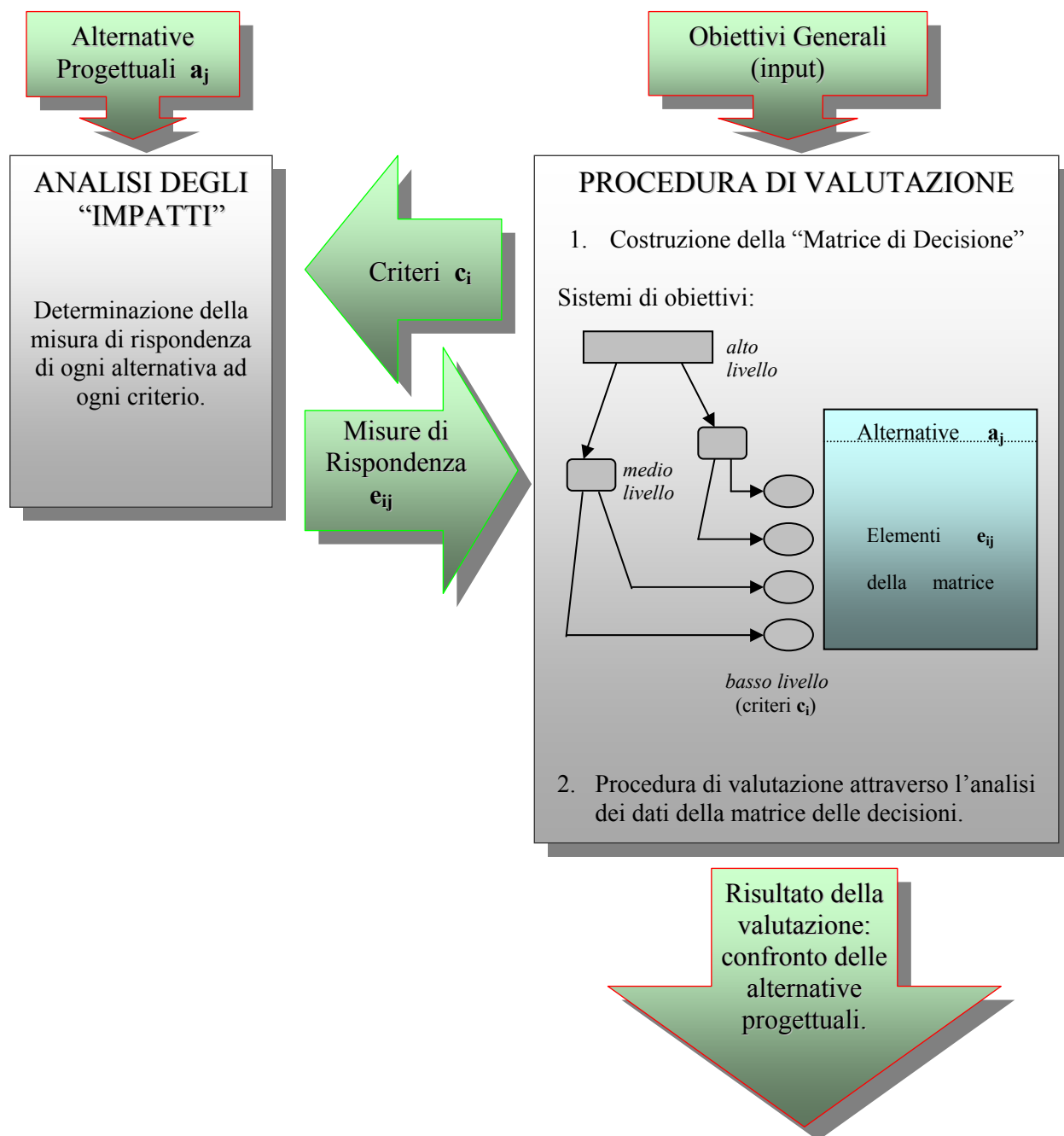


Figura 8: modello formale della procedura di valutazione multicriteria

La seconda fase principale è quella in cui si applica la procedura di valutazione e scelta: i dati raccolti nella matrice sono differentemente elaborati in base alla “tecnica di analisi” utilizzata.

L’analisi multicriteria, è contraddistinta da una matrice di decisione nella quale le colonne sono relative alle alternative (soluzioni progettuali nel nostro caso) e le righe sono riferite ai criteri di giudizio, o “*indicatori di prestazione*”, definiti in relazione agli obiettivi prestabiliti (ogni obiettivo può essere rappresentato da più criteri).

Come abbiamo già sottolineato, l’elemento generico  $e_{ij}$  della matrice  $D$ , relativo alla  $j$ -esima alternativa  $a_j$  e all’ $i$ -esimo criterio di giudizio  $c_i$ , rappresenta la misura di rispondenza

dell'alternativa al criterio e cioè il “contributo” che l'alternativa dà al raggiungimento dell'obiettivo di cui il criterio di valutazione rappresenta lo strumento interpretativo.

A questo punto è necessario evidenziare che le misure di rispondenza possono essere “qualitative” o “quantitative”, questo significa che possiamo utilizzare delle misure “*cardinali*” (una quantità comunque determinata, nella sua unità di misura) o dei giudizi qualitativi di tipo “*ordinale*” (una graduatoria del livello raggiunto) o semplicemente “*nominale*” (attributi di qualità). Nella matrice possono anche incontrarsi tutti e tre i tipi di misura, originando così una struttura fortemente disomogenea.

Ad ognuno dei criteri di valutazione attribuiamo un “peso” in relazione alla sua importanza relativa nel contesto decisionale ed in relazione quindi alla importanza che il decisore, insieme a numerosi esperti, attribuisce al conseguimento dell'obiettivo di cui l'indicatore di prestazione è rappresentativo.

Riassumendo, una analisi multicriteria si articola quindi in alcune fasi principali, schematizzabili come segue:

1. identificazione delle alternative progettuali  $a_j$ ,
2. definizione del sistema degli obiettivi e dei relativi criteri  $c_i$ ,
3. costruzione della matrice di decisione  $D$ ,
4. elaborazioni delle misure di rispondenza  $e_{ij}$  (o  $x_{ij}$ ),
5. valutazione e confronto delle alternative e scelta conclusiva.

Per quanto concerne l'individuazione delle alternative di progetto, occorre evidenziare che dobbiamo sempre considerare e valutare soluzioni progettuali “incompatibili” fra loro, cioè tali che la realizzazione dell'una escluda la realizzazione dell'altra.

Seguendo le indicazioni esposte, per ogni problema decisionale affrontabile con l'approccio MADM, costruiamo la matrice di decisione  $D$  e in base alla tecnica di analisi ritenuta più opportuna elaboriamo i dati in essa contenuti. In particolare, in questo lavoro, utilizzeremo la tecnica UVA o SAW, la tecnica ELECTRE e la tecnica TOPSIS.

## 5.1 Utility Value Analysis (UVA) o Simple Additive Weighting method (SAW).

La tecnica Simple Additive Weighting anche chiamata Utility Value Analysis è la più conosciuta, e più comunemente utilizzata, tecnica di analisi MADM.

In linea di principio tale tecnica di analisi multicriteria aggrega ed elabora, per ogni alternativa, gli impatti relativi ai singoli criteri in due passi fondamentali successivi. Innanzitutto, gli impatti quantitativi di ciascuna soluzione alternativa, relativi ai criteri in esame, stimati nelle loro originali unità di misura nella matrice di decisione, sono trasformati in “*misure di utilità*” o “*indici di utilità*”, che mostrano in modo adimensionale con quale grado di bontà tali impatti soddisfano gli obiettivi stabiliti. Analoga trasformazione si effettua per le misure di rispondenza qualitative, espresse, come vedremo, in unità fuzzy. Tale trasformazione degli impatti, che rappresenta una omogeneizzazione degli elementi della matrice, è ottenuta tramite l'utilizzo di una “*funzione di valore*” o “*funzione di utilità*” che deve essere stabilita per ogni singolo criterio dallo staff decisionale sulla base di interviste a numerosi esperti.

Assegnando opportunamente dei coefficienti di peso ai criteri di valutazione, gli indici di utilità sono trasformati nelle “*utilità parziali*” che vengono sommate, per ogni singola

alternativa, fino ad ottenere il “*valore di utilità*”. In ogni caso i pesi assegnati riflettono l'importanza di ciascun criterio di valutazione in una opportuna scala numerica, sulla base del giudizio del decisore e di numerosi altri esperti.

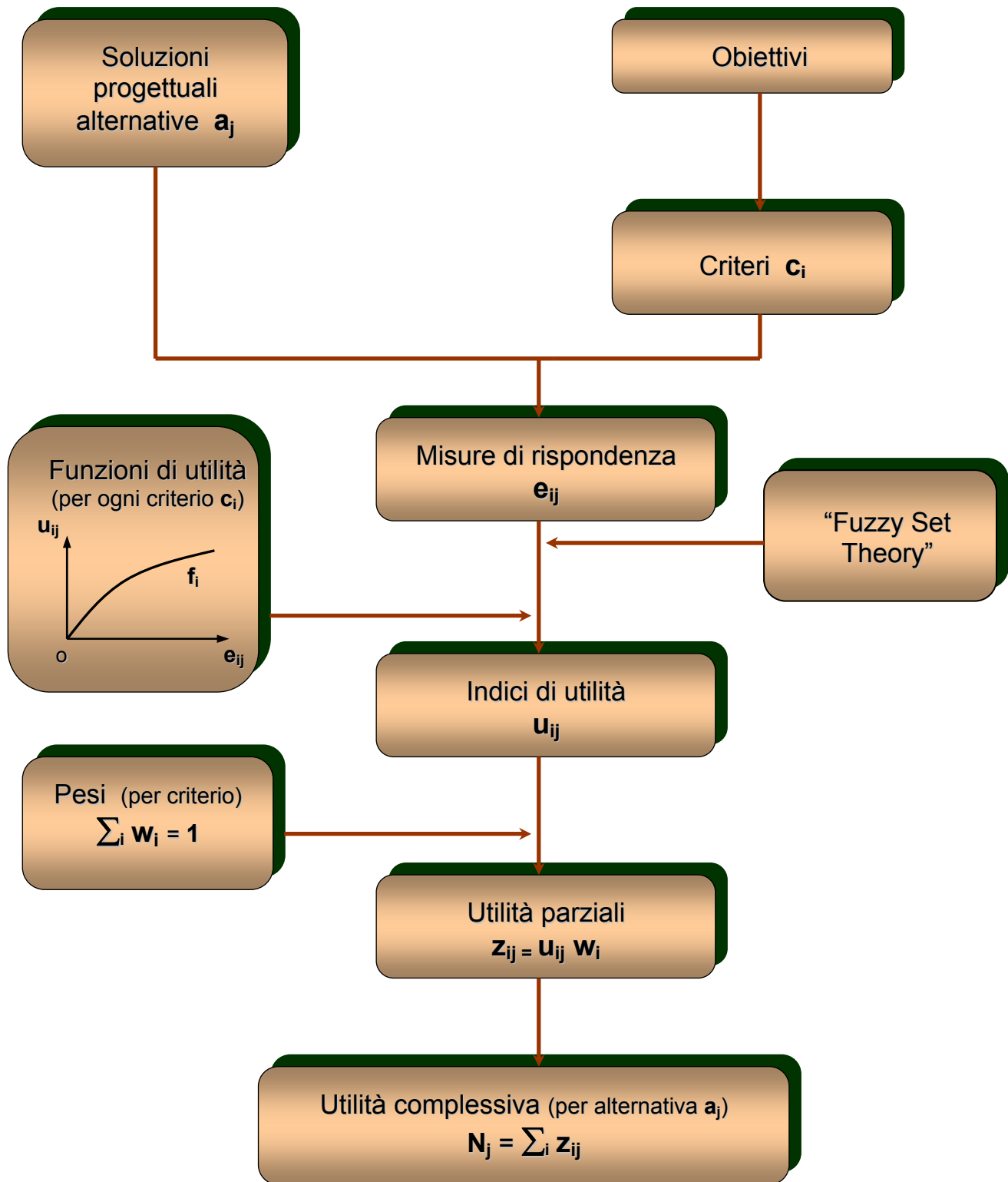


Figura 9: schema logico delle fasi operative della tecnica UVA (SAW).



Il risultato della tecnica UVA (SAW) è quindi l'insieme dei valori di utilità di tutte le alternative, questo significa che la Utility Value Analysis valuta una situazione decisionale complessa avvalendosi soltanto di un principio di decisione: il valore di utilità. Ciò comporta che tale tecnica di analisi necessita di una approfondita e completa analisi degli impatti.

Esaminiamo ora in dettaglio i due passi fondamentali delineati avendo come riferimento la figura 9, nella quale sono rappresentati i momenti logici fondamentali della tecnica UVA (SAW).

Per ciascuna alternativa progettuale  $a_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ) e ciascun criterio  $c_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) il decisore deve determinare la misura di rispondenza  $e_{ij}$ : questi impatti sono tra loro non confrontabili, in quanto misurati in varie unità di misura non omogenee, ad esempio km, sec, kg, km/h, kW/h, ... unità fuzzy. Al fine di rendere omogenei e quindi confrontabili fra loro gli impatti espressi nelle diverse unità di misura, occorre trasformarli in numeri confrontabili utilizzando le funzioni di utilità  $f_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) determinate per ciascun criterio  $c_i$ . Le funzioni  $f_i$  consentono, quindi, normalizzando i singoli valori, di eliminare le unità di misura presenti nella prima costruzione della matrice di decisione. Queste funzioni trasformano le iniziali misure di rispondenza  $e_{ij}$  nelle cosiddette misure di utilità  $u_{ij}$ : è da osservare che la misura di utilità non è quasi mai linearmente proporzionale alla misura di rispondenza, in quanto ad un incremento della misura di rispondenza corrisponde di solito un incremento più o meno proporzionale dell'utilità. Le misure di utilità  $u_{ij}$  indicano in quale misura un impatto risponde alle richieste, perciò esse possono interpretarsi come punteggio di raggiungimento dell'obiettivo.

In un secondo momento, determiniamo il peso  $w_i$  di ogni criterio  $c_i$ , in base alla condizione che la somma di tali pesi relativi sia uguale ad uno. Ogni peso iniziale, da cui si ottengono i pesi relativi, riflette l'importanza relativa del criterio e viene fissato dal decisore o dallo staff decisionale. A questo punto il prodotto della misura di utilità  $u_{ij}$  per il peso  $w_i$  rappresenta la utilità parziale  $z_{ij}$ .

Infine possono essere aggregate le utilità parziali di ciascuna alternativa, e dato che i criteri sono indipendenti, la aggregazione si effettua con una semplice somma. In questo modo la "utilità complessiva", ossia il valore di utilità,  $N_j$  dell'alternativa  $a_j$  è una somma pesata di impatti trasformati. L'alternativa migliore è semplicemente quella che presenta il valore di utilità più elevato. Ovviamente a causa dei coefficienti di peso la somma delle utilità parziali, cioè la utilità complessiva, è un numero che non può mai eccedere il valore uno (oppure in termini percentuali il valore 100 %).

Una concreta applicazione della UVA con l'appropriato sistema di obiettivi e corrispondenti criteri, pesi e funzioni di utilità, è valida soltanto per il confronto di un dato numero di alternative progettuali e per uno specifico contesto decisionale. Per ciascuna nuova situazione di valutazione questo complesso processo deve essere riconsiderato completamente.

Per la determinazione delle funzioni di utilità relative a ciascun criterio di valutazione adottato sono necessarie consulenze di numerosi tecnici esperti e interviste ad un campione di soggetti, estratti tra quelli appartenenti alla componente sociale cui è destinato il progetto, al fine di comprendere le logiche che regolano le relazioni tra impatti e utilità (valore) delle singole alternative, relativamente ai diversi criteri.

Ad ogni funzione di utilità corrisponde ovviamente una curva che rappresenta graficamente la relazione funzionale misura di rispondenza  $e_{ij}$  – misura di utilità  $u_{ij}$  riportato nello schema logico di figura 9.

Proprio per questi motivi, la UVA (SAW) risulta essenzialmente una tecnica di valutazione soggettiva, questo comporta che, per ciascun criterio, la analisi delle utilità  $u_{ij}$  al variare delle oggettive e soggettive misure di rispondenza  $e_{ij}$ , può avvalersi delle funzioni matematiche che riteniamo più opportune. Questo significa che possiamo esprimere le funzioni di utilità con le funzioni matematiche che riteniamo più rispondenti a ciascuna logica che mette in relazione la utilità associata ad un criterio con le misure di rispondenza di ogni alternativa.

Le funzioni di valore utilizzabili nella UVA si possono sempre suddividere nelle due grandi categorie:

- ❑ funzioni non decrescenti;
- ❑ funzioni non crescenti.

La logica alla base del singolo criterio ci indica se utilizzare una funzione non decrescente, oppure non crescente, che rifletta la forma di dipendenza della misura di utilità  $u_{ij}$  dalla misura di rispondenza  $e_{ij}$ .

Una volta stabilito il “genere” della funzione da impiegare, il decisore o lo staff decisionale, sceglie il tipo specifico di funzione in base alle informazioni ottenute dal contesto applicativo particolare, e in base a indagini, consulenze e interviste.

Esempi comuni di funzioni utilizzabili nella UVA sono la funzione lineare, la quadratica, la cubica, la iperbolica, la esponenziale, la logaritmica, la funzione a gradino e la funzione incrementale e decrementale ad S.

Quando non riusciamo a conoscere esattamente la reale relazione funzionale tra le misure di rispondenza (impatti) e le utilità di ogni criterio, possiamo riferirci solamente al genere della funzione da impiegare per esprimere tale relazione funzionale.

Nel seguito faremo riferimento a due semplici e generali funzioni di utilità, corrispondenti in modo evidente alle relazioni di non decrescenza e non crescita, che consentono allo stesso tempo una semplice omogeneizzazione (normalizzazione) dei dati:

- ❑ la funzione lineare  $y = m \cdot x$  con  $m \in \mathbb{R}$  e  $m > 0$ ,
- ❑ la funzione iperbolica  $x \cdot y = a$  con  $a \in \mathbb{R}$  e  $a > 0$ .



La prima funzione di utilità si riferisce al caso pratico in cui la logica alla base del criterio riflette l'aumento dell'utilità e quindi della validità della alternativa, al crescere dell'impatto dell'alternativa (in pratica crescono i benefici al crescere dell'impatto).

La seconda funzione di utilità invece esprime la logica opposta di decrescenza della validità della alternativa al crescere degli impatti (è il caso ad esempio dei costi).

## 5.2 Elimination Et Choice Translating Reality (ELECTRE).

La tecnica di analisi ELECTRE è stata originariamente introdotta da Benayon, Roy e Sussman e successivamente sviluppata da Roy, Nijkamp, van Delft ed altri, fino ad assumere le caratteristiche attuali.

Questa tecnica si applica una volta nota la matrice di decisione  $D$  compilata in termini di indici di utilità  $u_{ij}$ , questo significa che lo sviluppo dell'analisi fino alla compilazione di tale matrice, è lo stesso di quello già esposto per la tecnica UVA (SAW). Una volta fissati i pesi dei criteri, con le modalità già viste, la tecnica confronta due alternative per volta e ritiene preferibile la prima A, alla seconda B, se si verificano due condizioni:

1. se il numero dei criteri di valutazione, ponderati sui pesi relativi loro attribuiti, che indicano la A preferibile alla B è maggiore di una quantità minima prestabilita;
2. se la massima delle differenze tra le misure di utilità, relative ai criteri che indicano la A preferibile alla B, è inferiore ad un valore soglia predeterminato.

In generale, a partire dalla matrice  $D$  espressa in termini  $u_{ij}$ , si calcolano gli “*indici di concordanza*” e gli “*indici di discordanza*”. Per ottenere i primi, esaminiamo tutte le possibili “disposizioni senza ripetizione” delle alternative a due a due e per ognuna individuiamo i criteri di valutazione in base ai quali la prima delle due alternative è preferibile alla seconda, calcoliamo quindi la somma dei pesi relativi  $w_i$  assegnati a tali criteri e a tale somma diamo il nome di indice di concordanza. Per ottenere i secondi, individuiamo per ogni coppia di alternative A e B i criteri di valutazione relativamente ai quali la seconda è migliore della prima e per ogni criterio, calcoliamo la differenza tra gli indici di utilità  $u_{ij}$  delle due alternative, calcoliamo poi per ogni criterio il rapporto tra tale differenza e la massima differenza riscontrata tra gli indici di utilità di ogni alternativa relativa a quel criterio: il massimo di tali rapporti è detto indice di discordanza.

Gli indici di discordanza sono perciò misure adimensionalizzate del massimo scarto di utilità dell'alternativa B rispetto alla A, in base ad uno dei criteri per cui l'alternativa A non è preferibile alla B. Gli indici di concordanza sono invece misure adimensionalizzate del numero di criteri a favore della alternativa A.

Effettuiamo ora in dettaglio l'analisi dei passi caratteristici di tale tecnica, riferendoci alla figura 10, che ne rappresenta i momenti logici fondamentali.

Gli indici di concordanza e di discordanza vengono determinati dopo aver trasformato le misure di rispondenza  $e_{ij}$  nelle misure di utilità  $u_{ij}$  tramite le funzioni di utilità (allo stesso tempo normalizzatrici)  $f_i$  e, nel caso degli indici di concordanza, anche grazie all'utilizzo dei pesi relativi  $w_i$  dei singoli criteri di giudizio, ricavati dai pesi assoluti. Le misure di rispondenza iniziali  $e_{ij}$  possono essere quantitative dimensionali e qualitative convertibili in numeri certi attraverso la “fuzzy set theory”, mentre le funzioni normalizzatrici  $f_i$  eliminano le iniziali unità di misura consentendo così di ottenere tutti valori numerici confrontabili fra loro, e contemporaneamente, essendo funzioni di utilità, riflettono la logica alla base del criterio di valutazione (logica di preferenza delle alternative che “impattano” di più, per i criteri che rappresentano benefici e vantaggi, logica di preferenza delle alternative che “impattano” di meno, per i criteri che rappresentano costi e svantaggi).

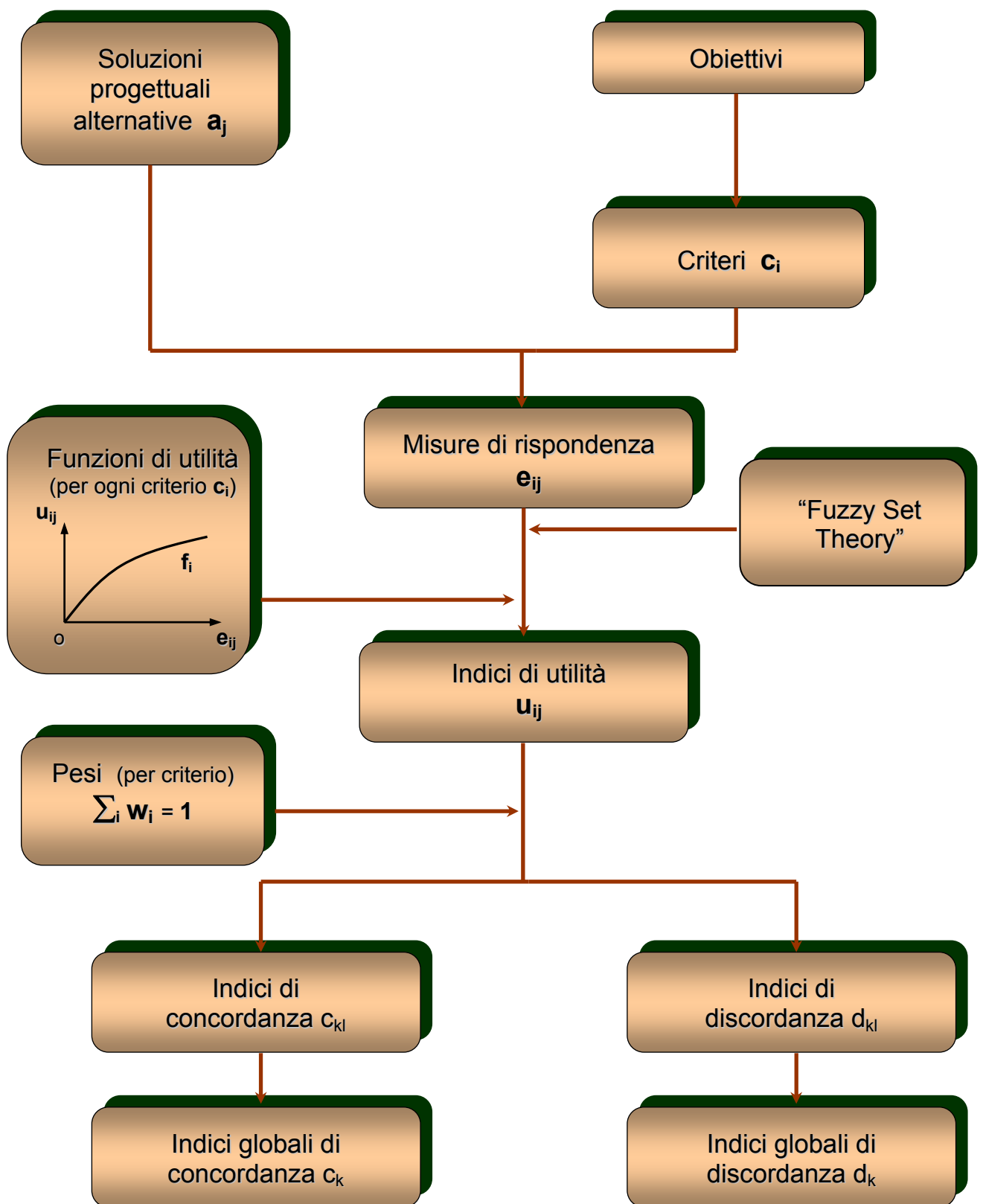


Figura 10: schema logico delle fasi operative della tecnica ELECTRE

Operativamente, per ciascuna coppia di alternative  $k$  ed  $l$  ( $k, l = 1, 2, \dots, m$  e  $k \neq l$ ), l'insieme dei criteri di valutazione  $I = \{i : i = 1, 2, \dots, n\}$  è costituito da due distinti sottoinsiemi. L'insieme di concordanza  $C_{kl}$ , delle alternative  $A_k$  ed  $A_l$ , è composto da tutti i criteri relativamente ai quali le misure di utilità di  $A_k$  sono preferite a quelle di  $A_l$ , ovvero:

$$C_{kl} = \{i : u_{ik} \geq u_{il}\}$$

Il sottoinsieme complementare, insieme di tutti i criteri relativamente ai quali le misure di utilità della alternativa  $A_k$  sono più basse di quelle dell'alternativa  $A_l$ , è detto insieme di discordanza ed è dato da:

$$D_{kl} = \{i : u_{ik} < u_{il}\} = I - C_{kl}$$

L'indice di concordanza  $c_{kl}$  tra  $A_k$  ed  $A_l$  è uguale alla somma dei pesi relativi associati ai criteri contenuti nell'insieme di concordanza, quindi tale indice è definito come:

$$c_{kl} = \sum_{i \in C_{kl}} w_i$$

L'indice di concordanza riflette, in sostanza, l'importanza relativa della alternativa  $A_k$  rispetto alla alternativa  $A_l$ . Un alto valore di  $c_{kl}$  indica quanto più  $A_k$  è preferita ad  $A_l$ . Ovviamente, per quanto già detto sui pesi relativi, si ha che  $0 \leq c_{kl} \leq 1$ .

I valori degli indici di concordanza, relativi a tutti i confronti a coppie,  $c_{kl}$  ( $k, l = 1, 2, \dots, m$  e  $k \neq l$ ) determinano la matrice di concordanza  $\mathbf{C}$ :

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} - & c_{12} & \dots & c_{1m} \\ c_{21} & - & \dots & c_{2m} \\ \dots & \dots & - & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & c_{m(m-1)} & - \end{bmatrix}.$$

Occorre notare che la matrice  $\mathbf{C}$  è in generale non simmetrica ed ovviamente ha i termini lungo la diagonale principale tutti nulli.

La determinazione dell'indice di concordanza  $c_{kl}$  consente di apprezzare la dominanza di una alternativa rispetto ad un'altra relativamente a determinati criteri, ma in questo modo non si evidenzia con quale grado, le valutazioni dei rimanenti criteri della alternativa  $A_k$ , sono peggiori rispetto alle valutazioni della alternativa concorrente  $A_l$ .

Per questo motivo introduciamo un secondo indice  $d_{kl}$  detto indice di discordanza definito dal rapporto:

$$d_{kl} = \frac{\max_{i \in D_{kl}} |u_{ik} - u_{il}|}{\max_{i \in I} |u_{ik} - u_{il}|}.$$

In pratica l'indice di discordanza fra due alternative concorrenti  $A_k$  ed  $A_l$  rappresenta il più grande fra tutti i rapporti, ognuno dei quali dato dalla differenza tra la misura di utilità della seconda alternativa e quella della prima diviso per la differenza massima fra le misure di utilità di tutte le alternative, per ciascun criterio relativamente al quale la seconda alternativa risulta essere preferibile alla seconda. Anche in questo caso è chiaro che l'indice di discordanza deve soddisfare la limitazione  $0 \leq d_{kl} \leq 1$ . Un elevato valore di  $d_{kl}$  significa che l'alternativa  $A_k$  è meno favorita rispetto alla  $A_l$ , in modo netto, relativamente ai criteri in suo sfavore, mentre un basso valore di  $d_{kl}$  implica che  $A_k$  può essere comunque preferibile alla  $A_l$ . Gli indici di discordanza introdotti definiscono la matrice di discordanza  $\mathbf{D}$ :

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} - & d_{12} & \dots & d_{1m} \\ d_{21} & - & \dots & d_{2m} \\ \dots & \dots & - & \dots \\ d_{m1} & d_{m2} & d_{m(m-1)} & - \end{bmatrix}.$$

Le informazioni contenute nella matrice di discordanza  $\mathbf{D}$  differiscono sensibilmente da quelle contenute nella matrice di concordanza  $\mathbf{C}$ . Le prime tengono conto delle differenze fra i valori delle misure di utilità  $u_{ij}$  relative ai vari criteri delle due alternative, di volta in volta concorrenti, rispetto ai quali la seconda alternativa è peggiore della prima. Le seconde invece tengono conto delle diversità esistenti tra le somme dei pesi assegnati ai criteri relativamente ai quali la prima alternativa è migliore della seconda.

La scelta delle alternative discende dall'analisi contestuale degli indici di concordanza e discordanza: i primi devono essere prossimi ad 1 e secondi a 0.

Si fissano dei "valori limite" per i due indici e si individuano le coppie di alternative che rispettano ambedue i limiti prefissati, per tali coppie sarà possibile formulare un giudizio di preferenza della prima alternativa rispetto alla seconda. Si variano poi i valori limite fino a riuscire ad individuare l'alternativa migliore.

A questo punto si può quindi determinare la "matrice di dominanza in base alla concordanza"  $\mathbf{F}$  con l'ausilio del "valore di soglia" o "valore limite"  $\bar{c}$  per l'indice di concordanza. La alternativa  $A_k$  ha la possibilità di dominare la concorrente  $A_l$  se il corrispondente indice di concordanza  $c_{kl}$  è superiore al suddetto valore di soglia  $\bar{c}$ :  $c_{kl} \geq \bar{c}$ . Sulla base di questa relazione si costruisce la matrice  $\mathbf{F}$  Booleana, i cui elementi sono definiti come:

$$\begin{aligned} f_{kl} &= 1, & \text{se } c_{kl} &\geq \bar{c} \\ f_{kl} &= 0, & \text{se } c_{kl} &< \bar{c} \end{aligned}$$

Quindi ciascun elemento unitario della matrice  $\mathbf{F}$  rappresenta la dominanza di una prima alternativa rispetto ad una seconda.

Formalmente analoga è la costruzione della "matrice di dominanza in base alla discordanza"  $\mathbf{G}$ , i cui elementi  $g_{kl}$  si determinano una volta noto il valore di soglia  $\bar{d}$ , in base alle relazioni:

$$\begin{aligned} g_{kl} &= 1, & \text{se } d_{kl} &\leq \bar{d} \\ g_{kl} &= 0, & \text{se } d_{kl} &> \bar{d} \end{aligned}$$

Anche gli elementi unitari della matrice  $\mathbf{G}$  rappresentano relazioni di dominanza, tra due qualsiasi alternative, della seconda rispetto alla prima.

Una fase molto delicata nello sviluppo dell'analisi è proprio la determinazione dei valori di soglia  $\bar{c}$  e  $\bar{d}$ . Questi valori sono caratterizzati da un elevato grado di arbitrarietà e il loro impatto sulla correttezza del risultato finale può essere significativo: tutto ciò fa sì che risulta conveniente costruire degli “indici globali” relativi a ciascuna alternativa. Nijkamp e van Delft hanno introdotto per primi tali indici globali, che nel prosieguo chiameremo  $c_k$  e  $d_k$  relativamente alle due alternative generiche  $A_k$  ed  $A_l$ . In particolare quindi, definiamo:

$$\begin{aligned} c_k &= \sum_{l=1, l \neq k}^m c_{kl} - \sum_{l=1, l \neq k}^m c_{lk}, \\ d_k &= \sum_{l=1, l \neq k}^m d_{kl} - \sum_{l=1, l \neq k}^m d_{lk}. \end{aligned}$$

Ovviamente l'alternativa  $A_k$  ha la più alta possibilità di essere accettata quando ha il più elevato valore di  $c_k$  e il più basso valore di  $d_k$ .

Questo significa che la selezione finale deve soddisfare la condizione che il valore dell'indice globale di concordanza risulti massimo e il valore dell'indice globale di discordanza risulti minimo. In sostanza questa procedura consente di ordinare e classificare le alternative in base ai valori suddetti.

Quindi per l'alternativa k-esima l'indice globale di concordanza è tanto maggiore quanti più sono e più pesano i criteri che fanno preferire l'alternativa k-esima alla l-esima e quanti meno sono e meno pesano quelli che fanno preferire la l-esima alla k-esima, invece l'indice globale di discordanza dell'alternativa k-esima è tanto maggiore quanto maggiori sono le differenze massime delle utilità tra l'alternativa l-esima e quella k-esima, ed è tanto minore quanto minori sono le differenze massime delle utilità tra la k-esima e la l-esima. Risulta appunto evidente che l'alternativa  $A_k$  è tanto più preferibile quanto maggiore è  $c_k$  e quanto minore è  $d_k$ . Conseguentemente sono da escludere le alternative che presentano valori negativi dell'indice globale di concordanza e valori positivi di quello di discordanza.

### 5.3 Technique for Order Preference by Similarity to Ideal Solution (TOPSIS).

Yoon e Hwang hanno sviluppato la tecnica di analisi TOPSIS basandosi sul concetto ipotetico ed intuitivo che in un qualunque contesto decisionale caratterizzato da molteplici alternative e molteplici criteri, l'alternativa preferibile è quella caratterizzata dalla più piccola distanza dalla soluzione ritenuta “ideale” e dalla più grande distanza dalla soluzione “ideale-negativa”.

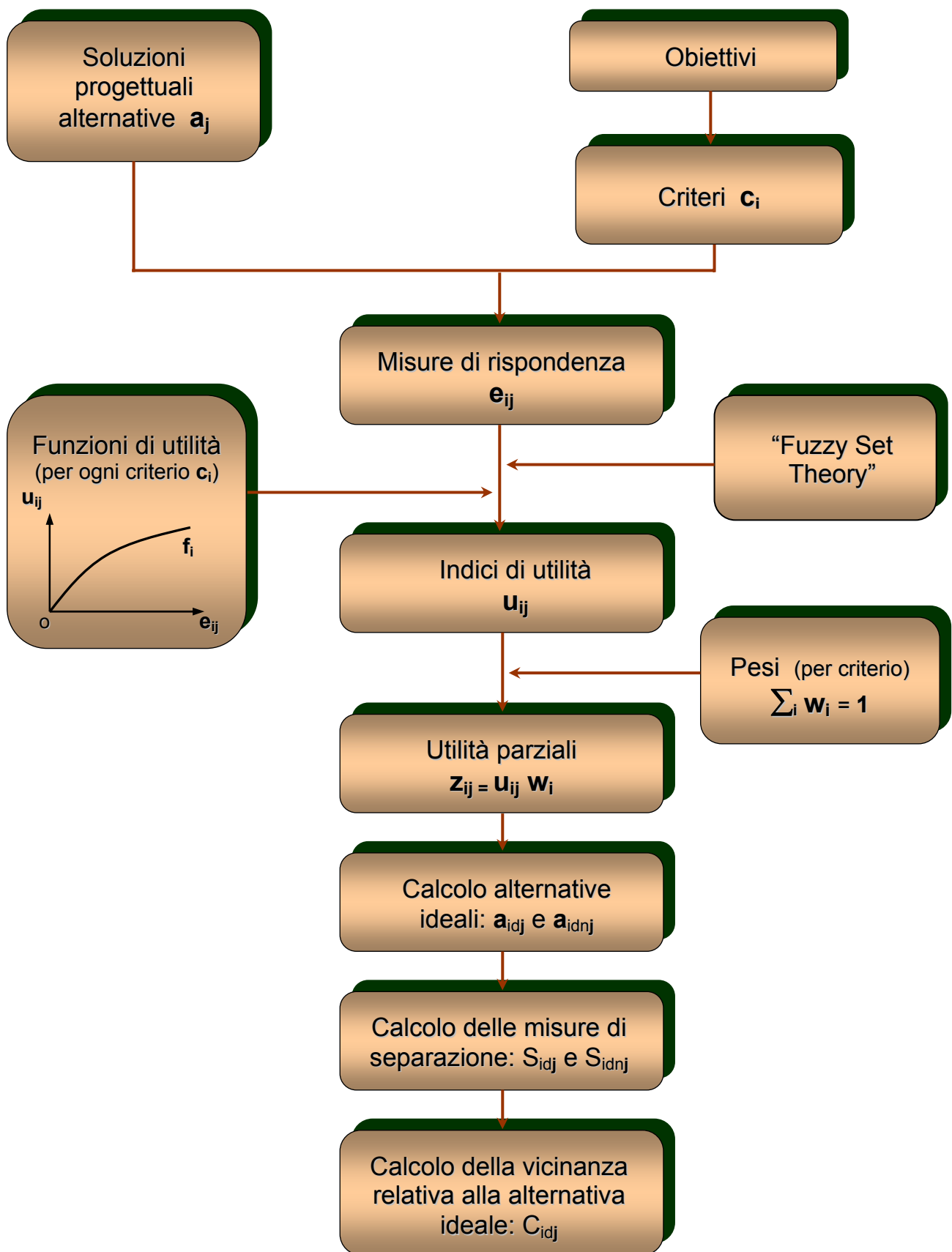


Figura 12: schema logico delle fasi operative della tecnica TOPSIS



Lo schema logico contenente i passi fondamentali di tale tecnica è riportato nella figura 12: in particolare, assumiamo che ciascun criterio di valutazione  $c_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) sia caratterizzato da una crescita (decrescenza) monotona della utilità ad esso associata, questa ipotesi di lavoro garantisce sempre una facile individuazione della alternativa “ideale” contraddistinta da tutti i migliori valori degli attributi relativamente ad ogni criterio e della alternativa “ideale-negativa” caratterizzata invece da tutti i valori peggiori. Ciò significa che per ogni alternativa  $a_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ), maggiore è il valore di ciascun attributo relativo ai criteri associati a benefici, più grande è la preferenza ad essa accordata, e più piccola è invece la preferenza per i criteri relativi a costi. Poiché non a tutti i criteri può essere associata la stessa importanza, anche per lo sviluppo di questa tecnica è necessaria, da parte del decisore, l’assegnazione di pesi che riflettano tale importanza. L’applicazione della “Teoria degli Insiemi Sfocati”, consente di trasformare gli impatti qualitativi  $e_{ij}$  presenti nella iniziale matrice di decisione  $D$  in numeri certi adimensionali, mentre le funzioni di utilità  $f_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) associate a ciascun criterio  $c_i$  permettono di tenere conto della logica alla base di ogni criterio e di omogeneizzare e quindi confrontare tutti i dati  $u_{ij}$  contenuti nella matrice di decisione trasformata (senza unità di misura). I pesi associati ad ogni criterio sono convertiti in pesi relativi  $w_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) la cui somma è uguale ad uno, dai prodotti dei pesi relativi associati ad ogni criterio per i dati normalizzati delle alternative relativi ai corrispondenti criteri otteniamo gli elementi della matrice di decisione espressa in misure di utilità parziali  $z_{ij}$ . L’aggregazione delle utilità parziali di ciascuna alternativa si effettua sulla base del calcolo della sua distanza euclidea dalla alternativa ideale e dalla alternativa ideale negativa. Nel caso del contesto decisionale generico qui esaminato, composto da  $m$  alternative  $a_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ) valutate relativamente ad  $n$  criteri  $c_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), una volta costruita la matrice di decisione in termini di utilità parziali  $z_{ij}$  definiamo le due alternative di riferimento:  $a_{id}$  (alternativa ideale) e  $a_{idn}$  (alternativa ideale negativa). Abbiamo rispettivamente:

$$\begin{aligned}
 a_{id} &= \left\{ \left( \max_j z_{ij} : i \in I \right), \left( \min_j z_{ij} : i \in I' \right) \text{ con } j = 1, 2, \dots, m \right\} = \\
 &= \{ z_{id1}, z_{id2}, \dots, z_{idn} \} , \\
 a_{idn} &= \left\{ \left( \min_j z_{ij} : i \in I \right), \left( \max_j z_{ij} : i \in I' \right) \text{ con } j = 1, 2, \dots, m \right\} = \\
 &= \{ z_{idn1}, z_{idn2}, \dots, z_{idnn} \} ,
 \end{aligned}$$

dove gli insiemi dei criteri associati ai benefici ed ai costi sono dati rispettivamente da  $I$  e  $I'$ :

$$I = \{i : i = 1, 2, \dots, n\}$$

$$I' = \{i : i = 1, 2, \dots, n\}$$

Chiaramente queste due alternative fittizie  $\mathbf{a}_{id}$  e  $\mathbf{a}_{idn}$ , costruite con le utilità parziali migliori e peggiori di ciascuna alternativa in esame, relativamente ai diversi criteri, determinano la alternativa più preferibile e quella meno preferibile in senso assoluto nel contesto decisionale.

A questo punto della procedura occorre calcolare la distanza euclidea di ciascuna alternativa da quella ideale (fittizia) costruita, utilizzando la:

$$S_{idj} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (z_{ij} - z_{idi})^2} \quad \text{con } j = 1, 2, \dots, m$$

Analogamente, la distanza euclidea di ciascuna alternativa da quella ideale negativa (fittizia) costruita, si ricava dalla:

$$S_{idnj} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (z_{ij} - z_{idni})^2} \quad \text{con } j = 1, 2, \dots, m$$

Dopo aver determinato tali grandezze dobbiamo calcolare la “vicinanza relativa” alla soluzione (alternativa) ideale  $\mathbf{a}_{id}$ , della generica alternativa  $\mathbf{a}_j$ , utilizzando la relazione:

$$C_{idj} = \frac{S_{idnj}}{S_{idj} + S_{idnj}} \quad \text{con } 0 < C_{idj} < 1, \quad j = 1, 2, \dots, m$$

Ovviamente risulta:

$$\begin{aligned} C_{idj} &= 1 & \text{se } \mathbf{a}_j &= \mathbf{a}_{id} & e \\ C_{idj} &= 0 & \text{se } \mathbf{a}_j &= \mathbf{a}_{idn} . \end{aligned}$$

Una alternativa generica  $\mathbf{a}_j$ , quindi, è tanto più vicina alla alternativa ideale quanto più la vicinanza relativa alla alternativa ideale è prossima al valore unitario.

Una volta determinati i valori delle vicinanze relative di tutte le alternative costituenti il contesto decisionale, queste possono essere ordinate e confrontate in base ai singoli valori di tali grandezze. L'alternativa migliore è logicamente quella che presenta la minore vicinanza relativa alla alternativa ideale fittizia.

## 6 Analisi di sensitività.

Tutte le tecniche di analisi introdotte in questo capitolo evidenziano come l'assegnazione dei pesi influenzi l'importanza relativa dei criteri di valutazione. Come già esposto l'assegnazione dei pesi è effettuata sulla base delle interviste fatte ai decisori ed agli esperti del settore o analizzando progetti simili già realizzati. I risultati ottenuti dalla applicazione delle diverse tecniche sono quindi necessariamente dipendenti in misura più o meno ampia dai valori inizialmente stabiliti per i pesi.

Tenuto conto di ciò, l'analisi di sensitività rappresenta un procedimento di indagine e verifica del grado di dipendenza, dei risultati ottenuti, dal sistema dei pesi adottato. In sostanza si valuta la "sensibilità", dei risultati ottenuti, in relazione alla variazione del vettore dei pesi.

Pertanto, l'assegnazione ragionata di differenti sistemi di pesi ai criteri di giudizio conduce alla individuazione delle caratteristiche di stabilità ed instabilità dei risultati delle diverse alternative progettuali concorrenti. La stabilità dei risultati diagrammati può essere verificata mediante confronti fra coppie di alternative e confronti globali, considerando la variazione del peso di un solo criterio da 1 fino a 10 e mantenendo tutti gli altri inalterati o assegnando prefissati valori tutti uguali ad ognuno (ad esempio tutti 1), oppure assegnando un "set" particolare di valori diversi.

Dove le tecniche di analisi UVA, ELECTRE e TOPSIS sono applicate ad un contesto progettuale-decisionale specifico, grazie all'uso di differenti sistemi di pesi è possibile effettuare una prima e semplice analisi sistematica della "robustezza" o "stabilità" della soluzione determinata.

Un'analisi preliminare sulla *stabilità* dei risultati ottenuti può essere effettuata in un primo momento assegnando valore unitario a tutti i pesi, e verificando che l'ordinamento delle soluzioni alternative rimanga stabile.

Un'analisi più ampia può essere condotta reiterando il metodo di valutazione più volte, ma facendo variare, su tutta la scala, di unità in unità, uno alla volta (e lasciando gli altri invariati), tutti i pesi (oppure solamente quelli dei criteri ritenuti più interessanti ai fini dell'analisi), per controllare, ancora una volta, la stabilità dei risultati. In questo modo, per ogni criterio indagato, e quindi per ogni peso ad esso assegnato, si ottiene il diagramma dell'ordinamento delle alternative in funzione della variazione della sua importanza (peso assegnatole), un intreccio in tale diagramma significa che al crescere dell'importanza (peso) di un determinato criterio di valutazione  $x$  l'alternativa  $a$ , da non preferire rispetto all'alternativa  $b$  diventa poi da preferire. Un punto di intreccio individua in alcuni casi un punto critico e sensibile cui si deve porre particolare attenzione nella sua spiegazione e valutazione, tanto più se riguarda alternative vincenti. Quando si scoprono punti (pesi) di intreccio dell'ordine di preferenza delle alternative concorrenti occorre rivalutare il sistema di pesi adottato nell'analisi ed eventualmente cambiarlo per sviluppare ulteriormente l'analisi. In sostanza in questo modo è possibile giudicare a posteriori la "bontà" del sistema di pesi adottato nell'analisi.